

# Chapitre 6 : Signaux et systèmes numériques

## 1. Définitions

### 1.1. Présentation

Le développement des calculateurs numériques, et en particulier l'accroissement des puissances de calcul, conduit à ce que le traitement des signaux s'effectue au sein de ces calculateurs. On parle alors du traitement numérique des signaux.

On rappelle qu'une chaîne de traitement numérique se présente de la manière suivante :

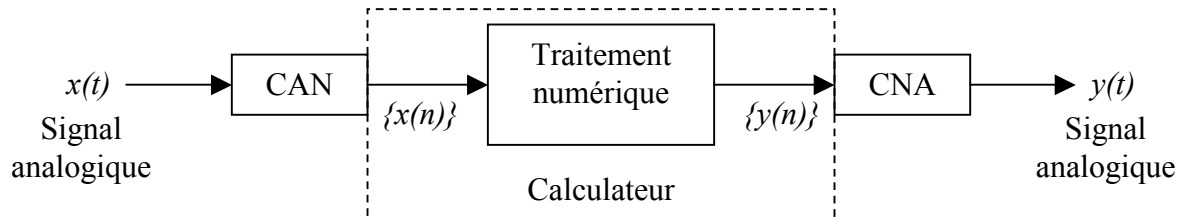


Figure 1 : Chaîne de traitement numérique

Dans cette partie on ne s'intéressera qu'à la partie traitement au sein du calculateur. Il ne s'agit plus ici d'étudier les signaux analogiques ( $x(t)$  et  $y(t)$ ) mais uniquement les signaux numériques ( $\{x(n)\}$  et  $\{y(n)\}$ ).

**Remarque** : Généralement pour le traitement numérique de signaux analogiques on peut distinguer deux approches :

- Toute la chaîne de traitement (du capteur à l'actionneur par exemple) est appréhendée de manière discrète. Ainsi les organes analogiques se voient modélisés de manière discrète. C'est le cas par exemple des systèmes de contrôle/commande numérique.
- Toute la chaîne de traitement est appréhendée de manière analogique. Le traitement numérique est déterminé à partir de caractéristiques analogiques. C'est le cas par exemple du filtrage numérique dont les gabarits répondent à des contraintes définies sur des modèles analogiques. Ces systèmes présentent généralement des fréquences d'échantillonnage très élevées pour limiter l'influence de l'échantillonnage.

### 1.2. Signal numérique

#### 1) Définition

Un signal numérique n'est pas à proprement parler un signal mais plutôt une suite finie ou infinie de nombres. Ces nombres correspondent généralement à des échantillons d'un signal analogique discrétisé et quantifié.

On notera  $\{x(n)\}$  cette suite d'échantillon, l'indice  $n$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$  ou de 0 à  $+\infty$  lorsque l'on considère des signaux causaux (i.e.  $x(n) = 0$  pour  $n < 0$ ).

#### 2) Remarques :

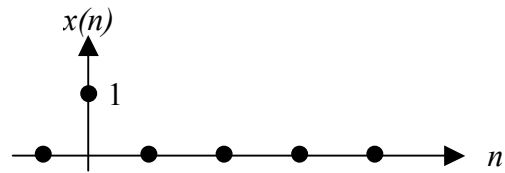
- l'indice est généralement une référence au temps mais certains signaux numériques peuvent avoir des indices qui n'ont aucun lien avec le temps. Ainsi une image fixe sera définie par une matrice de point  $f(x,y)$ , où les indices discrets  $x$  et  $y$  sont des références spatiales.
- La notion de signal numérique traitée ici ne doit pas être confondue avec les signaux analogiques correspondant à une transmission numérique. Ces derniers correspondent à des modulations dites numériques où les signaux véhiculés sont des signaux analogiques. On peut prendre l'exemple d'une transmission sur un fil où l'on transmet chaque bit avec deux niveaux de tension (0 et 5V). Le signal est alors un signal aléatoire analogique (temps continu, tension analogique). Un tel signal correspond au signal  $y(t)$  de la Figure 1, où le CNA serait un CNA 1 bit.

#### 3) Exemples de signaux

## 1. Impulsion unitaire

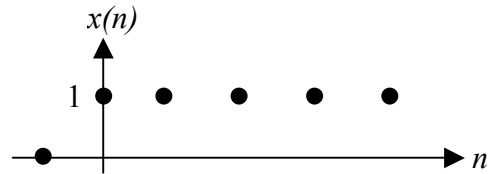
$\{x(n)\} = \{\delta(n)\}$  symbole de Kroenecker

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{quand } n = 0 \\ 0 & \text{quand } n \neq 0 \end{cases}$$



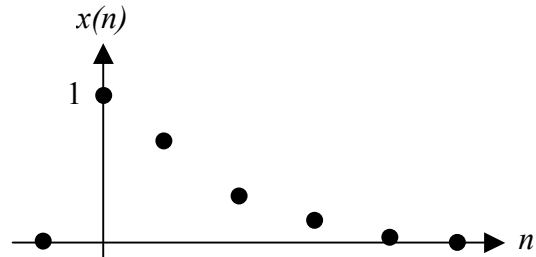
## 2. Echelon

$\{x(n)\} = \{u(n)\}$



## 3. Exponentielle (causale)

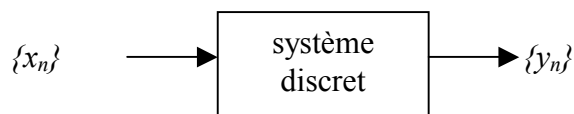
$\{x(n)\} = \{a^n u(n)\}$



## 1.3. Systèmes discrets linéaires

### 1.3.1. Définition

Un système discret linéaire est un système qui effectue la transformation d'un signal discret  $\{x(n)\}$  en un signal discret  $\{y(n)\}$  avec l'hypothèse de linéarité ( $a\{x_1(n)\} + b\{x_2(n)\}$  donne  $a\{y_1(n)\} + b\{y_2(n)\}$ ).



A un instant  $n$  la réponse  $y_n$  du système dépend de l'entrée  $x_n$  et de l'état interne du système. Cet état peut, dans la majorité des cas, être défini par une combinaison linéaire :

- des entrées  $\{x_n\}$
- des sorties  $\{y_n\}$

dans ce cas, le système discret sera défini, dans le cas d'un système causal (où les effets ne peuvent précéder la cause) :

$$y_n + \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^q b_i x_{n-i}$$

A un instant  $n$ ,  $y_n$  dépend

- de  $\{x_n\}$  à l'instant  $n$
- des  $q$  valeurs de  $\{x_n\}$  précédant l'instant  $n$
- des  $p$  valeurs de  $\{y_n\}$  précédant l'instant  $n$

Pour un système non causal,  $y_n$  peut dépendre des valeurs de  $\{y_n\}$  et  $\{x_n\}$  suivant l'instant  $n$ ...

Une telle forme est appelée **équation de récurrence**, car  $y_n$  peut être déterminé à chaque instant en fonction des  $p+q$  valeurs précédentes de  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$ .

Lorsque les termes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $p$ ,  $q$  (caractéristiques du système discret) sont invariants sur l'échelle de temps où l'on travaille on parle de systèmes discrets linéaires invariants.

### 1.3.2. Les types de systèmes discrets

On peut distinguer deux types de systèmes discrets :

- a) Les systèmes discrets provenant d'un traitement numérique.

- b) Les systèmes discrets provenant de la discrétisation d'un système analogique.

Dans le premier cas, le système correspond à un calculateur numérique réalisant un traitement spécifique. On parle généralement de ***filtre numérique***.

Dans le second cas, on modélise toute la chaîne physique, capteur, CAN, calculateur, CNA, actionneur, ..., en discret. Dans cette hypothèse le système numérique peut être un système analogique observé aux instants de discrétisation. Bien évidemment, dans ce dernier cas, l'évolution physique du système entre deux instants est inconnue et elle peut être quelconque. Exemple : systèmes asservis numériques.

La plupart du temps, en traitement du signal on ne fait pas de distinction et l'on parle de ***filtrage linéaire des signaux***.

## 2. Transformée en Z

### 2.1. Définition

Comme pour l'étude des signaux analogiques où l'on utilise la transformée de Fourier ou la transformée de Laplace, l'étude des signaux discrets utilise un plan transformé appelé **transformée en Z**. Cette transformée dérive directement des deux précédentes.

On rappelle qu'un signal échantillonné s'écrit de la manière suivante

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

où  $\delta(t)$  est la distribution de Dirac.

La transformée de Fourier s'écrit alors :

$$TF[x_e(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e) e^{-j\pi n T_e}$$

Si le signal est causal, on utilise alors la transformée de Laplace :

$$L[x_e(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e) e^{-pnT_e}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} z &= e^{2j\pi T_e} && \text{pour les signaux non causaux} \\ z &= e^{pT_e} && \text{pour les signaux causaux} \end{aligned}$$

La transformée en Z s'écrit alors :

$$TZ[x_e(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e) z^{-n} \quad \text{pour les signaux non causaux}$$

$$TZ[x_e(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e) z^{-n} \quad \text{pour les signaux causaux (plupart des cas)}$$

La transformée en Z ne dépend pas de  $T_e$ , on peut donc l'appliquer aux signaux discrets :

$$X(z) = TZ[\{x(n)\}] = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=0}}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

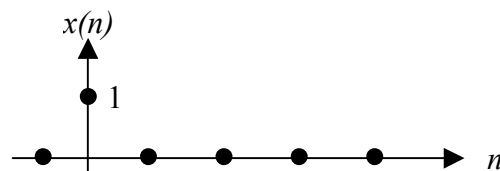
En toute rigueur la variable  $z$  doit appartenir à une couronne définie par  $(R_1 < |z| < R_2)$  dite couronne de convergence qui permet à la série entière de converger. Par la suite on supposera que cette couronne est non vide et que la série converge.

### 2.2. Exemples de signaux

#### 1) Impulsion unitaire

$\{x(n)\} = \{\delta(n)\}$  symbole de Kroenecker

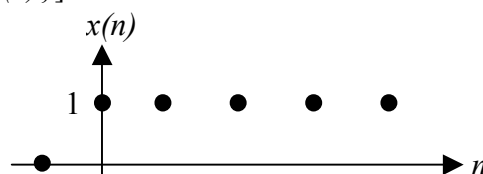
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{quand } n = 0 \\ 0 & \text{quand } n \neq 0 \end{cases}$$



$$TZ[\{\delta(n)\}] = 1$$

#### 2) Echelon

$\{x(n)\} = \{u(n)\}$

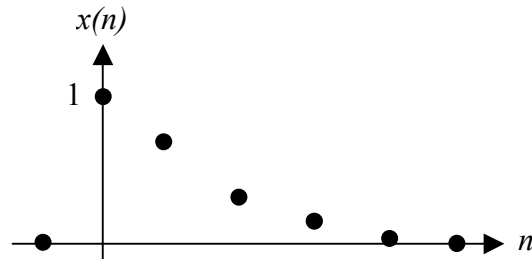


$$TZ[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

### 3) Exponentielle

$$\{x(n)\} = \{a^n u(n)\}$$

$$TZ[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$



## 2.3. Propriétés

### 1. Linéarité :

$TZ[a \{x(n)\} + b \{y(n)\}] = a X(z) + b Y(z)$  où  $X(z)$  et  $Y(z)$  sont respectivement les TZ de  $\{x(n)\}$  et  $\{y(n)\}$ .

### 2. Théorème du retard

$$TZ[\{x(n-k)\}] = z^{-k} X(z) \text{ où } X(z) \text{ est la TZ de } \{x(n)\}$$

### 3. Multiplication par $a^n$

$$TZ[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

### 4. Valeur initiale et valeur finale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

### 5. Dérivation

$$TZ[n x(n)] = -\frac{dX(z)}{dz}$$

### 6. Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} X(z) X^*(1/z^*) \frac{dz}{z}$$

### 7. Table des transformée en Z

$\{x(n)\}$	$X(z)$
$\delta(n)$	$1$
$\delta(n-k)$	$z^{-k}$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$n u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-a z^{-1}}$
$n a^n u(n)$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$

$\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2 z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$
$\sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2 z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$
$a^n \cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - a z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2 a z^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$
$a^n \sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{a z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2 a z^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$

## 2.4. Transformée en Z inverse

### 1) Décomposition en éléments simples

Il est difficile d'établir une relation de transformée en Z inverse simple. La méthode la plus simple consiste à décomposer en éléments simples. En effet, les transformées en Z s'écrivent sous la forme d'une fraction polynomiale :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K_0 z^{-r} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-q}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-p}}$$

Une telle fonction possède  $n$  pôles  $p_i$  ( $1/F(p_i) = 0$ ). La décomposition en éléments simples permet de se ramener à une somme de transformées en z de fonctions exponentielles.

$$TZ^{-1} \left[ \frac{K_i z^{-r}}{1 - p_i z^{-1}} \right] = \{K_i p_i^{n-r}\}$$

### 2) Méthode des résidus

Pour retrouver les éléments  $x_n$  du signal  $\{x_n\}$ , on utilise la méthode des résidus, un équivalent de la méthode précédente, permettant de résoudre l'équation :

$$x(n) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

Où  $\Gamma$  est un contour dans la couronne de convergence ( $R_1 < |z| < R_2$ ). Cela correspond en fait à la Transformée de Laplace ou de Fourier inverse avec  $z = e^p$  pour la transformée de Laplace ou  $z = e^{2j\pi f}$  pour la transformée de Fourier (pour la TF le contour est alors le cercle unité).

Le calcul s'effectue en calculant les résidus de la  $X(z) z^{n-1}$  sur tous les pôles  $p_i$  de la fonction :

$$\{x(n)\} = \left\{ \sum_i \text{rés}[X(z) z^{n-1}, p_i] \right\}$$

Les résidus se définissent par :

$$\text{si } p_i \text{ est un pôle simple: } \text{Rés}[X(z), p_i] = \lim_{z \rightarrow p_i} [(z - p_i) X(z)]$$

$$\text{si } p_i \text{ est un pôle d'ordre } n: \text{ Rés}[X(z), p_i] = \lim_{z \rightarrow p_i} \left[ \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - p_i) X(z)] \right]$$

### 3. Systèmes discrets

#### 3.1. Transformée en Z des systèmes discrets

Un système discret peut être décrit par son équation de récurrence (cf. 1.3. ):

$$y_n = \sum_{i=0}^q b_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$$

ainsi le signal de sortie peut être décrit par la relation suivante :

$$\{y_n\} = \sum_{i=0}^q b_i \{x_{n-i}\} - \sum_{i=1}^p a_i \{y_{n-i}\}$$

La transformée en Z est linéaire, en utilisant le théorème de retard la relation précédente devient dans le plan transformé :

$$Y(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i} Y(z)$$

soit :

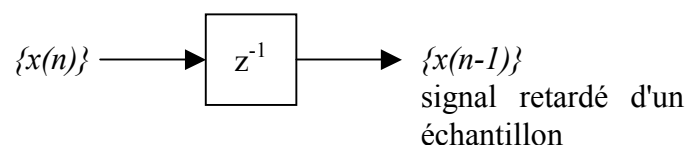
$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} X(z)$$

On définit alors la **fonction de transfert en Z**, comme la fraction polynomiale reliant les transformées en Z du signal d'entrée et du signal de sortie :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

La transformée en Z permet d'étudier facilement les systèmes discrets. Elle joue le même rôle que les transformées de Fourier ou Laplace pour les systèmes à temps continu. En effet, la connaissance de la fonction de transfert en Z,  $H(z)$ , d'un système discret, permet de déterminer facilement le signal de sortie en fonction du signal d'entrée. Il suffit de travailler dans le plan transformé.

#### Exemple de fonction de transfert : cellule retard



Il s'agit en fait d'une simple cellule mémoire, qui mémorise à chaque instant ( $T_e$ ) la donnée en entrée et la restitue une unité de temps après.

#### Note :

une fonction de transfert en z rationnelle de la forme

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}, \text{ peut être mise sous la forme : } H(z) = k \frac{\prod_{i=0}^q (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=0}^p (1 - p_i z^{-1})}, \text{ où :}$$

- $z_i$  est appelé **zéro** de la fonction de transfert
- $p_i$  est appelé **pôle** de la fonction de transfert

## 3.2. Réponse temporelle des systèmes discrets

### 3.2.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est la réponse au signal d'impulsion unitaire  $\{\delta(n)\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots\}$  dans le cas causal ou sinon  $\{\dots \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots\}$  correspondant à la distribution de Dirac en théorie du temps continu.

En théorie des signaux discrets on distingue 2 catégories de systèmes :

- la réponse impulsionnelle est finie (i.e.  $h(n) = 0$  pour  $n > N-1$ ) le système est alors appelé système **RIF** (Réponse Impulsionnelle Finie) ou FIR in english. On parle également de **filtres non récursifs**.
- la réponse impulsionnelle est infinie, le système est alors appelé système **RII** (Réponse Impulsionnelle Infinie) ou IIR in english. On parle également de **filtres récursifs**.

On repart de la forme générale d'un filtre :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) z^{-n}$$

la réponse impulsionnelle est donnée par les coefficients de pondération  $h(n)$  du filtre.

#### 1. RII

Il existe au moins un élément  $a_i \neq 0$  (il existe au moins un pôle) la relation liant les échantillons d'entrée et de sortie (relation de récurrence) est alors récursive, la réponse impulsionnelle est alors infinie.

#### 2. FIR

Si les  $a_i = 0$  pour tout  $i$ , le système ne possède alors pas de pôle, on obtient un système RIF dont la transformée en Z est la suivante :

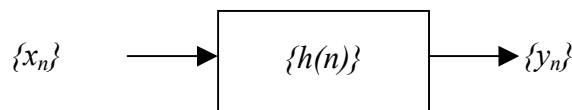
$$H(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i}$$

La relation d'entrée sortie devient alors :  $y(n) = \sum_{i=0}^q b_i x(n-i)$

La réponse au signal d'impulsion unité donne :  $Y(z) = H(z) T_Z[\{\delta(n)\}] = H(z)$  donc  $\{h(n)\} = \{b_0 \ b_1 \ \dots \ b_q \ 0 \ 0 \ \dots\}$

### 3.2.2. Convolution discrète

Connaissant la réponse impulsionnelle  $\{h(n)\}$  d'un filtre on cherche l'expression de la sortie  $\{y_n\}$  de ce système en réponse à une excitation  $\{x_n\}$ .



La transformée en Z est établie à partir de la réponse impulsionnelle :  $H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i}$  et

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

L'équation de récurrence du système s'écrit alors :  $y(n) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + \dots$ , soit :

$$y(n) = \sum_k^n h(k) x(n-k)$$

Cette expression définit le produit de convolution discret :



$$\{y(n)\} = \{x(n)\} * \{h(n)\} = \left\{ \sum_k x(k)h(n-k) \right\} = \left\{ \sum_k x(n-k)h(k) \right\}$$

Notes : si  $\{x(n)\}$  et  $\{h(n)\}$  sont respectivement de longueur N1 et N2  $\{y(n)\}$  est de longueur N1 + N2 - 1

Lorsque le temps est continu, la transformation du signal  $x(t)$  au travers d'un système de réponse impulsionnelle  $h(t)$  est donnée par la relation suivante :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(u) * h(t-u) du$$

ce qui correspond au produit de convolution de  $x(t)$  par  $h(t)$ . Lorsque l'on étudie les signaux discrets, on trouve que la transformation d'un signal  $\{x(n)\}$  au travers d'un système discret de réponse impulsionnelle discrète  $\{h(n)\}$  est donnée par le même type de relation : le produit de convolution discret.

En fait tout se passe comme si l'on avait échantillonné un filtre analogique.

#### Preuve :

On écrit le produit de convolution du signal échantillonné avec le filtre échantillonné :

$$\begin{aligned} x_e(t) * h_e(t) &= \int x_e(u) * h_e(t-u) du \\ &= \int \sum_n x(nTe) \delta(u - nTe) \sum_j h(jTe) \delta(t-u-jTe) du \end{aligned}$$

Le produit sous l'intégrale est nul sauf pour  $u = k Te$  (premier peigne de dirac). Dans ce cas on obtient :

$$\int \sum_n x(nTe) \delta(u - nTe) du = \sum_k x(kTe)$$

Pour ces valeurs de  $u$  l'expression de la seconde somme devient  $\delta(t-u-jTe) = \delta(t-(k+j)Te)$ . En posant  $k+j=l$  et en remplaçant  $j$  par  $l-k$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} x_e(t) * h_e(t) &= \int x_e(t) * h_e(t-u) du \\ &= \int \sum_n x(nTe) \delta(u - nTe) \sum_j h(jTe) \delta(t-u-jTe) du \\ &= \sum_l \left( \sum_k x(kTe) h((l-k)Te) \right) \delta(t-lTe) \end{aligned}$$

On retrouve bien le produit de convolution discret.

### **3.3. Réponse en fréquence et stabilité des systèmes discrets**

#### **3.3.1. Réponse en fréquence**

Le comportement fréquentiel d'un système numérique peut être déterminé en se ramenant à la transformée de Fourier du système discret.

Cette opération s'effectue à l'aide du changement de variable :

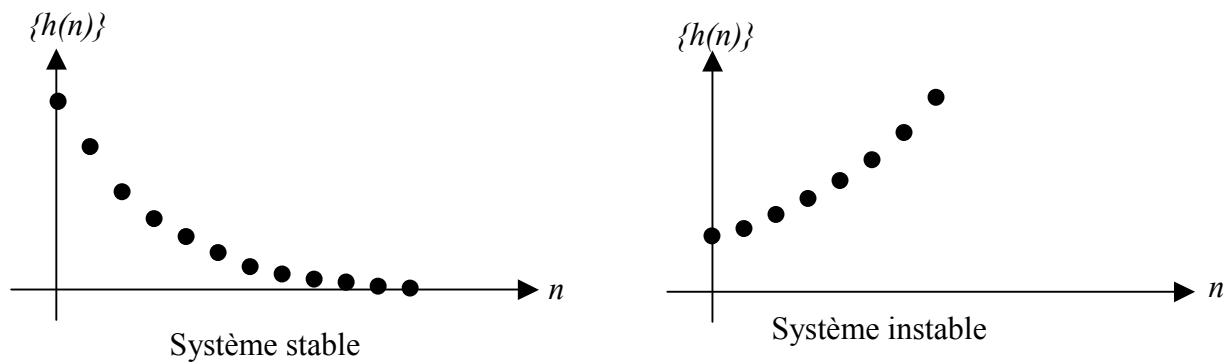
$$H(z) \xrightarrow{z = e^{j2\pi f T_e}} H(f)$$

On associe un point M dans le "plan des z" (plan complexe). En posant  $z = e^{j2\pi f T_e}$ , les valeurs de la fonction de transfert en fréquence,  $H(f)$ , sont obtenues lorsque le point M décrit le cercle unité.

Bien évidemment, on retrouve la périodicité de la réponse en fréquence due à l'échantillonnage : un tour de cercle correspond à une période  $F_e$  de la réponse en fréquence.

#### **3.3.2. Stabilité**

Un système,  $\{h(n)\}$ , stable est un système dont la réponse impulsionnelle tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Cela correspond à un système qui après une excitation impulsionnelle revient à sa position d'origine.



*Figure 2: Stabilité de la réponse impulsionnelle*

On peut montrer qu'un système discret est stable si les pôles de la fonction de transfert en  $z$  sont de module inférieur à 1. Ce qui s'interprète géométriquement par l'image  $M_i$  des pôles  $p_i$  à l'intérieur du cercle unité.

En appliquant le changement de variable  $z = e^{pT_e}$ , on fait correspondre le demi-plan gauche du plan de Laplace avec le disque unité. Sachant qu'une fonction de transfert de Laplace est stable ssi les pôles sont à partie réelle négative (demi-plan gauche), la stabilité dans le plan de  $Z$  se traduit par la présence de tous les pôles à l'intérieur du cercle unité.

Cette notion peut s'interpréter facilement par la transformée en  $Z$  inverse. La décomposition en éléments simples de la fonction de transfert :

$$H(z) = k \frac{\prod_{i=0}^q (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=0}^p (1 - p_i z^{-1})}$$

fait apparaître des éléments de la forme :  $\frac{k_i}{(1 - p_i z^{-1})}$  correspondant à des réponses impulsionnelles de la

forme :  $\sum p_i^n z^{-n}$ . Or ces séries tendent vers 0 si et seulement si  $|p_i| < 1$

Remarque : en toute rigueur pour qu'un filtre soit stable, il est nécessaire que  $\sum |h_n| < \infty$  (gain statique) afin que la réponse à l'échelon unité (fréquence nulle) soit stable dans le temps.

## **4. Filtre numérique**

### **4.1. Généralités**

Le filtrage numérique des signaux est une composante essentielle du traitement du signal. Il est utilisé essentiellement pour deux objectifs :

- séparation de signaux : extraction d'un signal mélangé à un autre
- reconstitution : suppression des distorsions apportées par les capteurs.

Le filtrage des signaux peut être réalisé en analogique comme en numérique. L'analogique présente l'avantage :

- d'être moins cher
- d'être plus rapide
- de posséder de très grandes dynamiques en amplitude (rapport entre signal le plus grand et bruit interne) et en fréquence (largeur de bande)

Les inconvénients présentés par le filtrage analogique sont supprimés par le filtrage numérique :

- dispersion des composants
- dérives thermiques

Ceci est particulièrement vrai lorsque l'on travaille avec des filtres d'ordre élevé. Ainsi, par exemple, si l'on souhaite réaliser un filtre ayant une réponse plate dans la bande passante (Butterworth) avec un ordre très élevé, il est nécessaire de mettre en série un grand nombre de cellule. La mise en cascade de ces cellules, de par la dispersion des composants entraîne s'il n'y pas de réglage fin des ondulations dans la bande passante...

Ceci étant, le principal avantage des filtres numériques réside dans leurs performances. En effet, il est possible avec un filtre numérique de réaliser des transitions en fréquence (coupure) avec une raideur irréalisable en analogique. Ex : un filtre ayant un gain de 1 du continu jusqu'à 1000 HZ et un gain de 0,0002 pour les fréquences supérieures à 1001Hz...

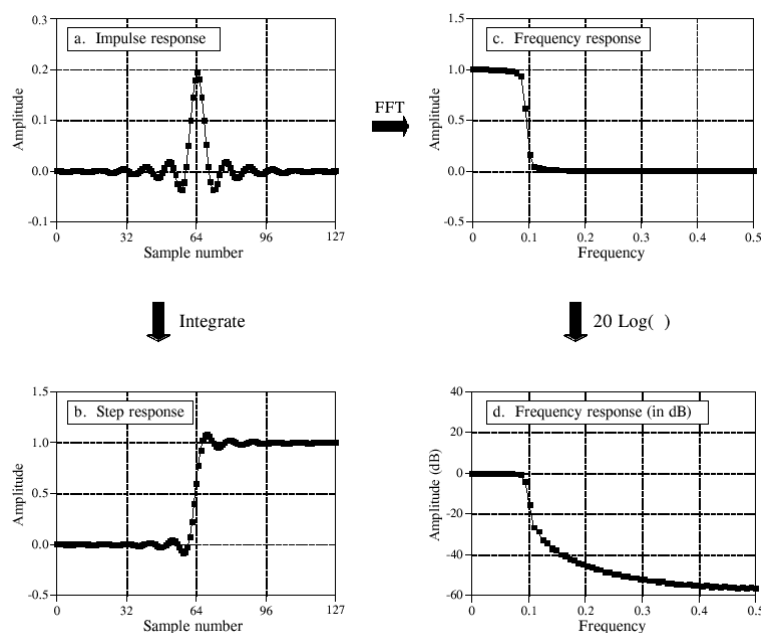
## 4.2. Critères de performance

### 4.2.1. Domaines d'étude et critères de qualité

Un filtre peut être étudié dans les deux domaines où réside l'information :

- domaine temporel : étude de la réponse impulsionnelle ou de sa primitive la réponse indicielle (réponse à un échelon)
- domaine fréquentiel : étude de la réponse en fréquence du filtre

Il est à noter que la réponse temporelle et la réponse fréquentielle contiennent exactement la même information. L'utilisation de l'une ou l'autre est privilégiée en fonction de l'application. En effet, si l'information peut s'interpréter plus facilement dans le domaine fréquentiel (par exemple un son) ou dans le domaine temporel (asservissement, image).

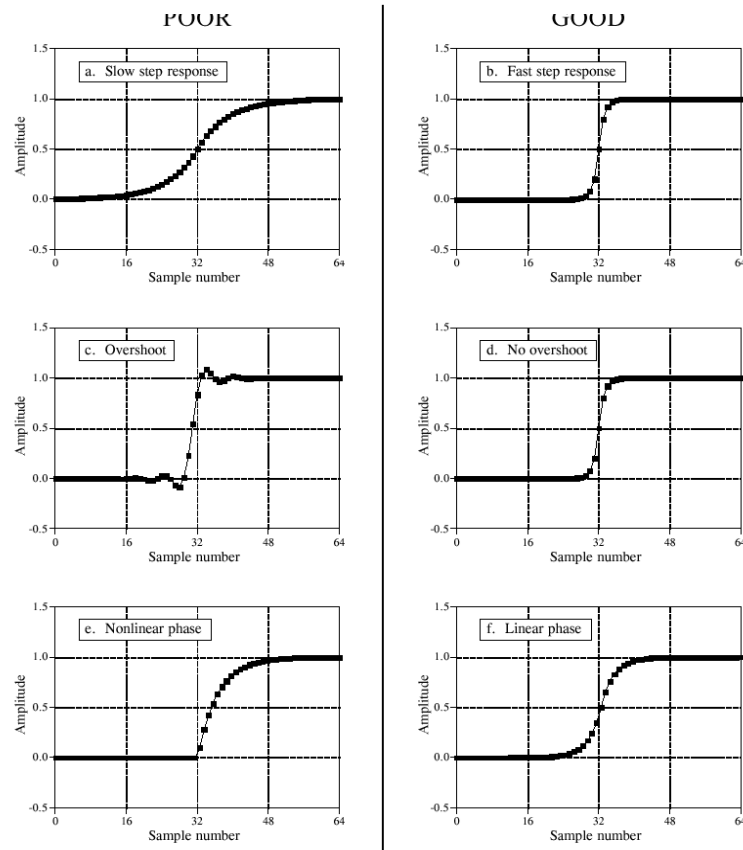


*Figure 3: réponse temporelle et fréquentielle d'un filtre :*

## 1) Domaine temporel

L'étude de la réponse indicielle permet de distinguer une première série de critères :

- le temps de réponse, définit par le nombre d'échantillons compris entre 10% et 90% de la valeur finale celui ci doit être rapide en regard de la fréquence d'apparition des événements (bien évidemment le temps de réponse sera limité par d'autres critères comme par exemple la réduction du bruit)
- "l'overshoot", correspond au dépassement de la valeur finale. Ce dépassement doit être le plus limité car il représente une certaine distorsion du signal.
- symétrie entre les deux moitiés de la montée. Cette symétrie implique une phase linéaire du filtre (pas de distorsion de phase en fréquence)



*Figure 4 : Critère de qualité de la réponse impulsionnelle*

## 2) Domaine fréquentiel

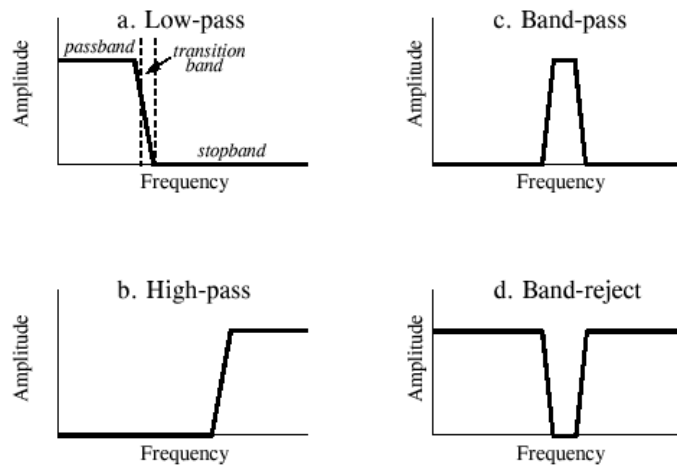
L'étude fréquentielle permet de définir 3 bandes de fréquences distinctes :

- la bande passante (passband) qui fait référence aux fréquences qui traversent le filtre
- la bande coupée (stopband) qui fait référence aux fréquences qui ne traversent pas le filtre
- la bande de transition (transition band) qui se trouvent entre les deux précédentes.

Les fréquences séparant la bande passante des bandes de transition sont appelées fréquences de coupure (cutoff frequencies). Elles sont généralement définies par un gain correspondant à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  fois le gain en bande passante (fréquence de coupure à  $-3\text{dB}$ ).

On définit généralement les 4 types de filtre suivants :

- filtre passe bas : bande passante comprise entre le continu et une fréquence  $f_0$
- filtre passe haut : bande passante supérieure à une fréquence  $f_0$
- filtre passe bande : bande passante comprise entre deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$
- réjecteur de bande : bande coupée comprise entre deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$

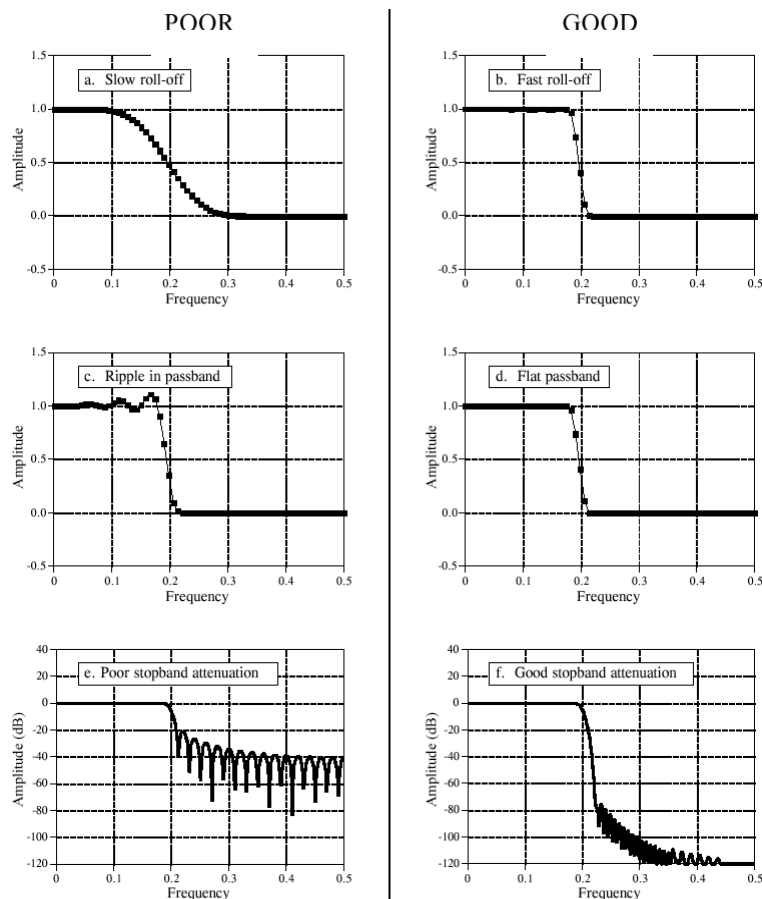


*Figure 5 : Types de filtre*

Les critères de qualité dans le domaine fréquentiel peuvent être résumés à :

- Une bande de transition étroite, c'est à dire une courbe d'atténuation (Roll Off) avec la pente la plus importante possible.
- Une bande passante plate, c'est à dire avec absence d'ondulations (ripple)
- Une atténuation importante en bande coupée
- Une phase linéaire

Il est à noter que le filtre idéal dans le domaine fréquentiel serait défini par la fonction porte  $rect\left[\frac{f - f_0}{B}\right]$  avec une phase linéaire



*Figure 6: Critère de qualité de la réponse fréquentielle*

#### **4.2.2. Types de filtre**

L'étude de ces différents filtres se résume à l'étude des filtres passe bas. En effet, à partir d'un prototype de filtre passe bas, il est possible d'obtenir un autre type de filtre par simple transformation.

##### **1) Passe haut :**

1. Inversion spectrale : on inverse le signe de tous les échantillons et on ajoute un échantillon de poids 1 au centre du filtre (Kroenecker). Cela entraîne l'inversion en ordonnée de la réponse fréquentielle (fonctionne bien lorsque le filtre est à phase linéaire avec une réponse impulsionnelle symétrique).

$$\{g_n\} = \{\delta_n\} - \{h_n\} \text{ avec } \{h_n\} \text{ réponse impulsionnelle du prototype passe bas}$$

2. Renversement spectral : on change le signe de tous les échantillons impairs. Cela implique un décalage en fréquence de 0,5 soit un retournement de la réponse fréquentielle autour de l'axe 0,25 ( $\pi/4$ )

##### **2) Passe bande:**

A partir d'un filtre passe bas et d'un filtre passe haut, on réalise un filtre passe bande par simple convolution des deux réponses impulsionnelles.

##### **3) Rejecteur de bande**

Pour réaliser un réjecteur de bande, il suffit d'additionner les réponses impulsionnelles d'un filtre passe bas et d'un filtre passe haut.

#### **4.2.3. Catégories de filtre numérique**

On sépare les filtres numériques en deux catégories distinctes :

- Filtre RIF : Réponse Impulsionnelle Finie ou encore filtre non récursif
- Filtre RII : Réponse Impulsionnelle Infinie ou encore filtre récursif

Filtre RIF : réponses impulsionnelles échantillonnées, pondérées et tronquées à N échantillons

- phase linéaire
- performances importantes
- grand nombre de calcul

Filtre RII : filtres récursifs synthétisés à l'aide d'une équation de récurrence

- facile à mettre en œuvre
- ordre peu élevé (à performance égale)
- phase non linéaire
- possibilité d'instabilité

Les filtre RIF sont utilisés dès que l'on souhaite une phase linéaire. Si aucune contrainte sur la phase n'est demandée, les filtres RII seront préférés.

#### **4.3. Filtres RIF**

##### **4.3.1. Méthode de la fenêtre**

La synthèse d'un filtre RIF classique est basée sur l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle du filtre souhaité.

Dans la majorité des cas, les réponses impulsionnelles échantillonnées sont les suivantes

- 1 fonction sinus cardinal (sinc)
- 2 fonction sinus cardinal pondéré par une fenêtre (Blackman ou Hamming)
- 3 fonction gaussienne (bonne localisation temporelle et fréquentielle)
- 4 transformée de Fourier inverse d'un cosinus surélevé (télécom)

##### **1) sinc**

La réponse impulsionnelle d'un filtre idéal de fréquence de coupure  $f_c$  est donnée par la fonction sinc :

$$h_n = \frac{\sin(2\pi f_c n)}{n\pi}$$

L'inconvénient d'une telle fonction est qu'elle est à support infini. Lors d'une synthèse de filtre une telle fonction sera :

- tronquée à N échantillons où N est un nombre impair
- décalée de N-1 échantillons afin de rendre la fonction causale (de 0 à N-1)

Ces modifications ont pour conséquence dans le domaine fréquentiel d'introduire des ondulations dans la bande passante et dans la bande coupée (phénomène de gibs). L'augmentation du nombre d'échantillons augmente la vitesse de transition, augmente le nombre d'ondulations sans diminuer leur amplitude.

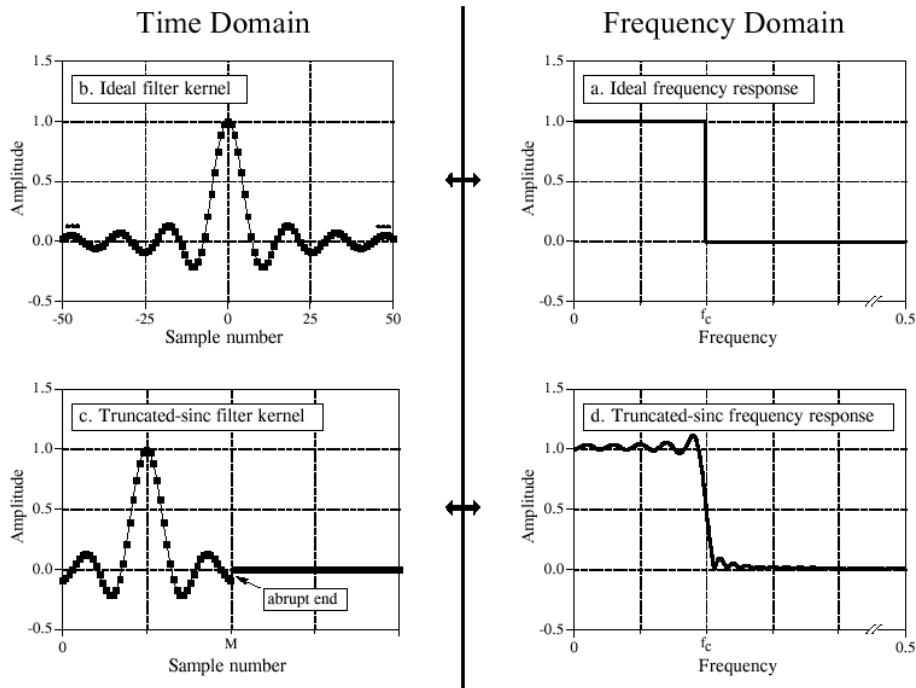


Figure 7 : réponse en fréquence d'un sinus cardinal tronqué

## 2) Sinc pondéré

Pour éliminer les ondulations, la solution consiste à éliminer les transitions abruptes de la réponse impulsionnelle au niveau de la troncature. On multiplie donc par une fenêtre de pondération. Les deux fenêtres les plus utilisées sont

- fenêtre de Hamming donnée par

$$w_n = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) :$$

- fenêtre de Blackman donnée par :

$$w_n = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

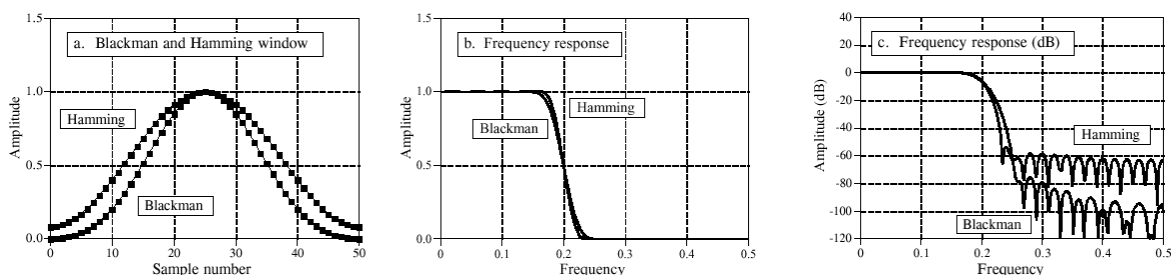


Figure 8 : fenêtres de Blackman et Hamming

La fenêtre de Hamming présente une transition plus rapide que celle de Blackman (de l'ordre de 20%). En revanche la fenêtre de Blackman présente une meilleure atténuation en bande coupée (-74dB au lieu de -

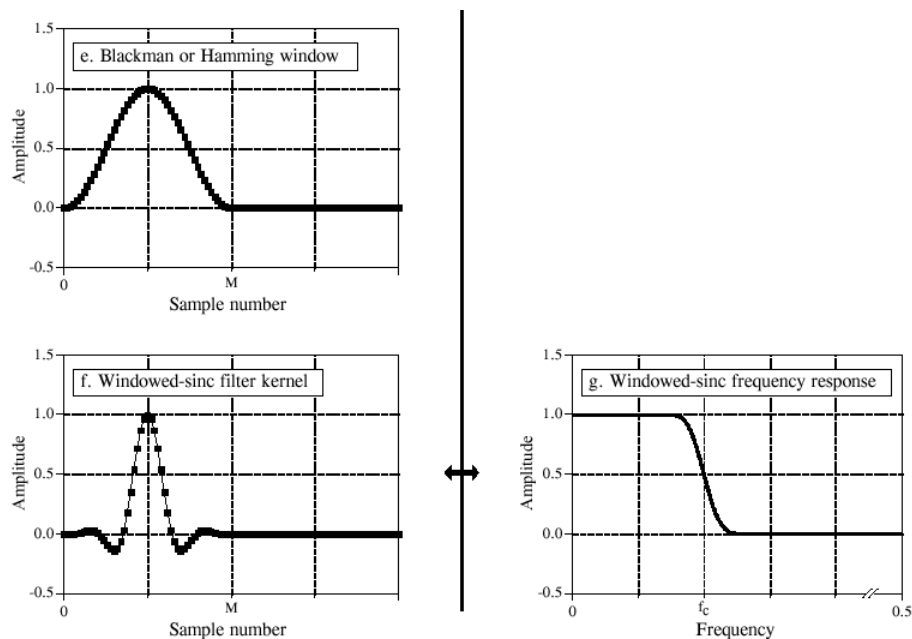
53dB). Par ailleurs, la fenêtre de Hamming présente plus d'ondulation (de l'ordre de 0,2%) en bande passante que celle de Blackman (0,02%).

Ces valeurs sont à comparer avec la fenêtre rectangulaire, qui pour une vitesse de transition 2,5 fois supérieure à celle de Blackman, présente une atténuation en bande coupée de l'ordre de (-21 dB) et des ondulations en bande passante de l'ordre de 9%.

En conclusion, ces fenêtres permettent de limiter les ondulations et d'augmenter l'atténuation en bande coupée au détriment de la transition qui est moins raide.

Il est à noter qu'il est possible d'atteindre des performances quasi idéales avec des longueurs de filtre importantes. Ainsi, on peut approximer la largeur de la bande de transition  $B_T$  (fréquence normalisée  $f/f_c$ ) par la relation  $N \approx 4/B_T$  où  $N$  est la longueur du filtre.

Bien évidemment lorsque les filtres sont de grande longueur, le temps de calcul s'allonge terriblement : Implémentation d'un produit de convolution nécessitant  $N$  multiplications accumulations à réaliser en une période d'échantillonnage.



*Figure 9 : réponse d'un sinus cardinal pondéré*

#### **4.3.2. Echantillonnage en fréquence**

Cette méthode de synthèse de filtre est basée sur la réponse en fréquence souhaitée.

- échantillonnage (en fréquence) de la réponse souhaitée
- les coefficients d'un filtre prototype sont obtenus par TFDI des échantillons en fréquence
- l'écart entre la réponse en fréquence du filtre prototype obtenu précédemment et la réponse en fréquence souhaitée est minimisée selon deux critères
  - moindre carré (norme  $L_2$ )
  - min-max (norme  $L_\infty$ ), utilisation de l'algorithme de Remez
- la minimisation permet d'obtenir les coefficients du filtre.

#### **4.4. Filtre RII**

Les filtres RII sont également appelés filtres récursifs car ils se définissent par une relation de récurrence conduisant à une réponse impulsionnelle à support infini.

Les méthodes de synthèse sont basées sur la transformation mathématique d'un filtre analogique en un filtre numérique. Le filtre analogique peut être défini par :

- une équation différentielle ou par une transmittance de Laplace. On utilise alors des approximations numériques des dérivées et des intégrations
- une courbe de réponse (réponse impulsionnelle ou indicielle)
- issu de la synthèse d'un gabarit fréquentiel, en utilisant une approximation polynomiale selon un certain critère (Butterworth, Chebichev, elliptiques, ...).



C'est la dernière méthode qui est généralement la plus employée.

#### 4.4.1. Transformation bilinéaire

La transformation bilinéaire est une transformation qui, au plan complexe  $z$  fait correspondre le point complexe  $p$  tel que :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

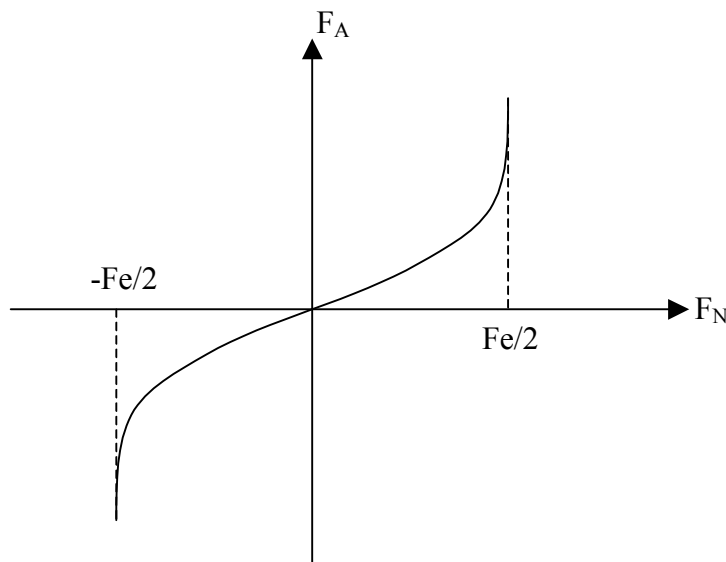
Cette transformation correspond à la compression des fréquences analogiques sur l'intervalle  $[-F_e/2, F_e/2]$  selon la fonction tangente.

En effet, pour tout point du cercle unité  $z = e^{j\omega T_e}$  la transformation fait correspondre :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{1 + e^{-j\omega T_e}} = j \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)$$

ou encore  $\omega_A = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right)$  avec  $\omega_A$  pulsation analogique et  $\omega_N$  pulsation numérique. La

correspondance est illustrée sur la Figure 10



*Figure 10 : Correspondance fréquence analogique et fréquence numérique*

On peut remarquer que pour les fréquences très éloignées de la fréquence d'échantillonnage  $F_e$

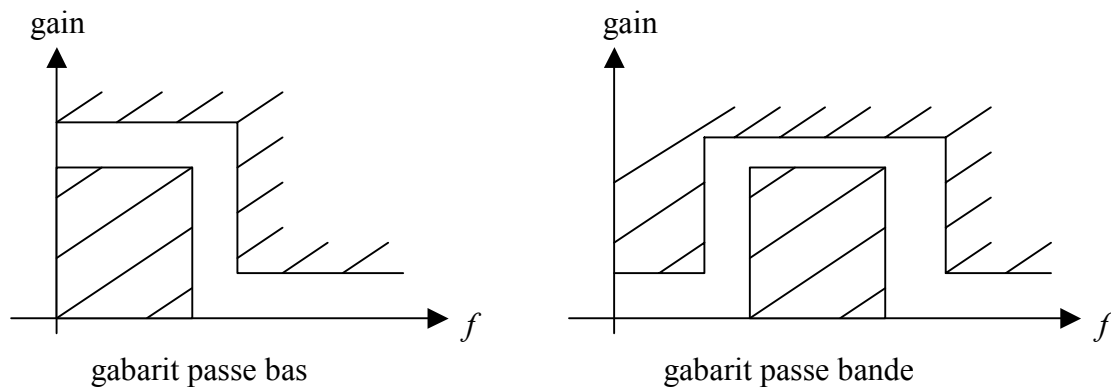
$$p \cong j\omega \text{ ou } \omega_A = \omega_N$$

La transformation bilinéaire permet ainsi de passer d'un filtre analogique à un filtre numérique à l'aide d'une transformation mathématique. On peut noter que l'on peut ajuster cette transformation pour qu'il y ait, à une fréquence  $f_0$  donnée, correspondance exacte entre la fréquence analogique et la fréquence numérique. En effet, il est possible de multiplier par un facteur d'échelle  $K$  la compression :

$$p = K \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \text{ avec } K \text{ choisi tel que } K = \frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T_e}{2}\right)} = \frac{2\pi f_0}{\tan\left(\frac{\pi f_0}{F_e}\right)}$$

#### 4.4.2. Gabarits et fonction d'approximation

Un gabarit fréquentiel se définit par un encadrement du module de la fonction de transfert comme montré sur la Figure 11.



*Figure 11 : gabarits fréquentiels*

Le gabarit fréquentiel permet alors d'effectuer des approximations polynomiales suivant certains critères d'optimisation. Ces approximations permettent alors d'obtenir un filtre analogique passe-bas qui est ensuite transformé en passe bande, passe haut, coupe bande puis discrétisé par transformation bilinéaire. Il est à noter que les approximations portent que sur le module. Les filtres ainsi réalisés présentent des réponses fréquentielles de la phase quelconque.

Il est à noter, que plus le gabarit est contraignant : bande de transition étroite, atténuation importante, plus l'ordre du filtre est important.

Critère d'optimisation utilisés :

- Butterworth : réponse la plus plate possible
- Chebychev : transition rapide, on autorise des ondulations en bande passante (Chebychev I) ou en bande coupée (Chebychev II). La vitesse de transition est supérieure aux filtres de Butterworth
- Elliptique : synthèse avec ondulation en bande passante et coupée. Ces filtres présentent la transition la plus rapide de tous les filtres
- Bessel : la phase est la plus linéaire possible (utilisé pour la synthèse de filtre analogique, en numérique on préférera un filtre RIF à phase linéaire)

## **5. Bibliographie**

- [1] Maurice Bellanger - *Traitement numérique du signal* – Dunod, 1998
- [2] Gérard Blanchet, Maurice Charbit - *Traitement numérique du signal* – Hermes, 1998.
- [3] Pierre-Marc Beaufiles, Michel Rami - *Le filtrage numérique* – Sybex, 1986.
- [4] Frédéric Truchelet - *Traitement linéaire du signal numérique* – Hermes, 1998
- [5] Steven W. Smith - *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing second edition*  
- California Technical Publishing 1999 - <http://www.dspguide.com/>